

$$\begin{aligned}\partial_k^i (\bar{\chi} \gamma_k) + \partial_k^e (\gamma_k \bar{\chi}) &= \varkappa \left( \bar{\chi} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \bar{\eta}} + \bar{\chi} \gamma_k \frac{\partial \tilde{F}}{\partial W_k^i} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial W_k^e} \gamma_k \bar{\chi} \right), \\ -\partial_k^i (\gamma_k \chi) - \partial_k^e (\chi \gamma_k) &= \varkappa \left( \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \bar{\eta}} \chi + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial W_k^i} \gamma_k \chi + \chi \gamma_k \frac{\partial \tilde{F}}{\partial W_k^e} \right).\end{aligned}\quad (67)$$

Man verifiziert, daß auch aus diesen Gleichungen die Kontinuitätsgleichung (51) folgt, daß also (51) nicht etwa speziell nur eine Folge des Separationsansatzes (40) und der darauf aufbauenden Schlüsse ist. Statt (52) erhält man nun

$$\tilde{L} = m_0 c^2 \left( \tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \bar{\eta}} + W_k^i \frac{\partial \tilde{F}}{\partial W_k^i} + W_k^e \frac{\partial \tilde{F}}{\partial W_k^e} - \tilde{F} \right). \quad (68)$$

Durch geeignete Wahl der Funktion  $\tilde{F}$  wird man sehr komplizierte nichtlineare Wechselwirkungen beschreiben können, ohne daß Divergenzen auftreten.

Es ist klar, daß eine so verallgemeinerte nichtlineare Theorie mit einem Spintensor und einem achtdimensionalen Konfigurationsraum wesentlich mehr Spielraum besitzt als eine nichtlineare Theorie mit einem Spinvektor und einem vierdimensionalen Konfigurationsraum. Daher ist es durchaus denkbar, daß die hier dargelegte Theorie nach weiterer Vervollständigung, insbesondere durch Hinzunahme der Feldquantisierung und Einbau in die Quantenelektrodynamik sehr erfolgreich sein könnte.

## Instabilität der positiven Säule endlicher Länge im magnetischen Feld

G. JANZEN

Institut für Gasentladungen und Photoelektronik der Universität Stuttgart

F. MOSER und E. RÄUCHLE

Institut für Plasmaforschung der Universität Stuttgart

(Z. Naturforsch. 25 a, 992—1006 [1970]; eingegangen am 21. Dezember 1969)

*Instability of the Positive Column of Finite Length in a Magnetic Field*

The instability of a diffusion-dominated positive column of a gas discharge in a longitudinal magnetic field is investigated both experimentally and theoretically. Dispersion relations are derived for the case of an  $m=1$  helical instability considering the finite length of the column. Regions of instability are calculated for various wavelengths of the instability.

Experiments were carried out in a positive column of variable length, ranging from 8.5 to 40 cm, at varying pressures of about 0.1 Torr of Neon.

There is a satisfactory agreement between theory and experiments. The main results are:

a) in long tubes instability occurs at a distinct magnetic field, calculated first by Kadomtsev and Nedospasov. Stable intermediate regions are possible at higher fields depending on the relations between the plasma-parameters;

b) in short tubes the column is stable again for higher magnetic fields;

c) in very short tubes there is no instability of this kind.

The observed frequency spectrum agrees with the theoretical values.

Das Plasma der positiven Säule einer Niederdruck-Gasentladung ist ein geeignetes Medium, um Diffusionsinstabilitäten zu untersuchen, die bei inhomogenen Dichteverteilungen auftreten.

Befindet sich die positive Säule in einem äußeren Längsmagnetfeld  $B$ , so wird die radiale Diffusion reduziert, was zu einer Verringerung der elektri-

schen Längsfeldstärke  $E$  der Entladung führt<sup>1</sup>. Eine Abweichung von diesem Verhalten, nämlich ein Anstieg der elektrischen Feldstärke, tritt ab einer bestimmten kritischen Magnetfeldstärke  $B_c$  auf. Dies wurde insbesondere von HOH und LEHNERT<sup>2</sup> beobachtet und diskutiert. Ähnliche Untersuchungen wurden in großer Zahl durchgeführt. Eine ausführ-

Sonderdruckanforderungen an Dipl.-Math. F. MOSER, Institut für Plasmaforschung der Universität Stuttgart, D-7000 Stuttgart 80, Pfaffenwaldring 31.

<sup>1</sup> R. I. BICKERTON u. A. v. ENGEL, Proc. Phys. Soc. London B **69**, 468 [1956].

<sup>2</sup> F. C. HOH u. B. LEHNERT, Proc. of the Fourth Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala 1959, Report III b, 25.



liche Darstellung mit Literaturhinweisen wird von SHEFFIELD<sup>3</sup> gegeben. Mit dem Anwachsen der elektrischen Feldstärke wird gleichzeitig ein Anwachsen der Potentialschwankungen an ins Plasma eingebrachten Sonden<sup>4</sup> und ein Anstieg der Mikrowellenemission<sup>5</sup> beobachtet.

Eine theoretische Erklärung für das Auftreten eines kritischen Magnetfeldes beim Beginn einer Instabilität der positiven Säule wurde von KADOMTSEV und NEDOSPASOV gegeben<sup>6</sup>. Ausgehend von den Kontinuitäts- und Bewegungsgleichungen für Elektronen und Ionen wird von diesen Autoren eine Dispersionsgleichung für die Ausbreitung einer Störung der Plasmaparameter, z. B. der Teilchendichte, abgeleitet, und das Stabilitätsverhalten für diese Störungen in einer Näherung diskutiert. In der Bewegungsgleichung für die Ionen wird dabei die Ionenträgheit und die Wirkung des Magnetfeldes auf die Ionenbewegung gegenüber den Reibungskräften der Ionen vernachlässigt. Diese Näherung kann dann durchgeführt werden, wenn die Wellenausbreitung in positiven Säulen bei höheren Drücken, z. B. Edelgasentladungen im Torr-Bereich, untersucht wird.

Die Untersuchungen von KADOMTSEV und NEDOSPASOV wurden von EWALD, CRAWFORD und SELF<sup>7</sup> durch Berücksichtigung der Ionenträgheit erweitert. Damit können die theoretischen Ergebnisse auch bei positiven Säulen relativ niederen Druckes angewandt werden, z. B. bei Entladungen im mTorr-Bereich. Dort ist die Stoßfrequenz  $\nu_i$  für Stoße zwischen Ionen und Neutralatomen etwa gleich oder kleiner als die Stoßfrequenz für ionisierende Stoße zwischen Elektronen und Neutralatomen. Infolge der Berücksichtigung der Ionenträgheit kann auch die Ausbreitung von ionenakustischen Wellen behandelt werden.

In den oben zitierten theoretischen Arbeiten wurde das Verhalten des Plasmas an der Stabilitätsgrenze, d. h. beim Übergang von stabilen zu instabilen Plasmaparametern unabhängig von der Länge des Entladungsgefäßes untersucht.

Ist  $k$  die Wellenzahl und  $\omega_i$  die zeitliche Dämpfungskonstante ( $\omega_i < 0$ ) oder die zeitliche Anwachskonstante ( $\omega_i > 0$ ) einer Welle, dann wird in obigen Arbeiten die Stabilitätsgrenze durch die Bedingun-

gen

$$\omega_i = 0, \quad (1)$$

$$d\omega_i/dk = 0 \quad (2)$$

festgelegt, unabhängig davon, ob die sich daraus ergebende Wellenlänge bei einer Wellenausbreitung in der positiven Säule möglich ist oder nicht.

Experimentell hat sich gezeigt<sup>2</sup>, daß das nach obigem Verfahren bestimmte Magnetfeld  $B_c$  nur dann von der Länge  $L$  des Gefäßes unabhängig ist, wenn  $L/2R \geq 50$  ist, wobei  $R$  der innere Gefäßradius ist. Damit gelten obige Ergebnisse nur für relativ große Gefäßlängen.

In der vorliegenden Arbeit wird die endliche Gefäßlänge bei der Berechnung der instabilen Bereiche des Plasmas berücksichtigt. Dabei werden dieselben Ausgangsgleichungen wie bei Kadomtsev und Nedospasov verwendet, die für positive Säulen relativ hohen Druckes gelten. Dieser Fall liegt bei unseren Experimenten vor. Es ergibt sich, daß bei kurzen Gefäßen das kritische Magnetfeld, bei dem die Instabilität einsetzt, größer als  $B_c$  ist. Bei sehr kurzen Gefäßen kann der Fall eintreten, daß das Plasma unabhängig vom Magnetfeld stets stabil ist. Plasmen in positiven Säulen endlicher Länge sind ab einem bestimmten Magnetfeld, das von der Plasmalänge und den übrigen Plasmaparametern abhängt, wieder stabil. Der Instabilitätsbereich ist endlich. Die Gefäßlänge ist mitbestimmend für die Breite des turbulenten Plateaus, wenn man die elektrische Feldstärke  $E$  als Funktion des Magnetfeldes  $B$  aufträgt.

Um die Ergebnisse zu prüfen, die unter Berücksichtigung der endlichen Gefäßlänge gewonnen wurden, wurden Experimente an Edelgas-Niederdruckentladungen durchgeführt. Dabei konnte die Gefäßlänge, d. h. der Abstand Kathode – Anode verändert werden. Zwischen den experimentellen und theoretischen Ergebnissen besteht befriedigende Übereinstimmung.

## I. Aufstellung der Grundgleichungen und der Dispersionsgleichung

Zur theoretischen Beschreibung des stationären Zustandes der diffusionsbestimmten positiven Säule, sowie der Störungen dieses Zustandes, werden fol-

<sup>3</sup> J. SHEFFIELD, Thesis, University of London 1966.

<sup>4</sup> K. H. WÖHLER, Z. Naturforsch. **17a**, 937 [1962].

<sup>5</sup> G. JANZEN u. E. RÄUCHLE, Proc. of the 8th Int. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Wien 1967, p. 4.4. 1–4.

<sup>6</sup> B. B. KADOMTSEV u. A. V. NEDOSPASOV, J. Nucl. Energy **1**, 230 [1960].

<sup>7</sup> H. N. EWALD, F. W. CRAWFORD u. S. A. SELF, Phys. Fluids **12**, 303 (Teil I) und 316 (Teil II) [1969].

gende lineare Gleichungen verwendet<sup>6</sup>:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n v_i) = n Z, \quad (3)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n v_e) = n Z, \quad (4)$$

$$v_i = -\frac{e}{m_i \nu_i} \nabla V, \quad (5)$$

$$\frac{k T_e \cdot \nabla n}{m_e} = -\frac{e}{m_e} [v_e \times \mathcal{B}] + \frac{e}{m_e} \nabla V - \nu_e v_e. \quad (6)$$

Die Gln. (3) und (4) sind die Kontinuitätsgleichungen für die Teilchendichten, die Gln. (5) und (6) sind die Bewegungsgleichungen für die Elektronen und Ionen. Dabei ist  $n$  die Ionen- bzw. Elektronendichte,  $v_i$  die Ionengeschwindigkeit,  $v_e$  die Elektronengeschwindigkeit,  $Z$  die Ionisationsrate,  $e$  die Elementarladung,  $m_i$  die Ionenmasse,  $m_e$  die Elektronenmasse,  $\nu_i$  die Ionenstoßfrequenz für die Stöße Ionen – Neutralgasatome,  $\nu_e$  die Elektronenstoßfrequenz für Stöße Elektronen – Neutralgasatome,  $V$  das elektrische Potential,  $k$  die Boltzmann-Konstante,  $T_e$  die Elektronentemperatur und  $\mathcal{B}$  die magnetische Induktion.

Diese Gleichungen können unter folgenden Voraussetzungen aus den allgemeinen Bewegungs- und Kontinuitätsgleichungen für die Elektronen und Ionen gewonnen werden: Es wird Quasineutralität vorausgesetzt, d. h., die Teilchendichten der Elektronen und Ionen sind gleich,  $n_i = n_e = n$ , die Temperaturen  $T_i$  und  $T_e$  werden räumlich konstant angenommen, weiter sind die Magnetfelder, bei denen eine Instabilität auftritt, im allgemeinen so klein, daß bei den üblichen Drucken die Ionenzyklotronfrequenz  $\omega_{ci}$  gegen die Ionenstoßfrequenz  $\nu_i$  vernachlässigt werden kann, d. h.  $\omega_{ci} \ll \nu_i$ . Infolge der niederen Ionentemperatur, die etwa gleich der Neutralgastemperatur ist, kann außerdem der Druckterm der Ionen  $(k T_i/m_i) \cdot (\nabla n/n)$  vernachlässigt werden. In der hier durchgeföhrten Theorie werden die Glieder  $(v_i \nabla) v_i$  und  $(v_e \nabla) v_e$  als nichtlineare Terme vernachlässigt. Die Frequenz der untersuchten Schraubeninstabilitäten ist für die hier experimentell untersuchten Plasmen kleiner als 200 kHz. Damit kann der Beschleunigungsterm in der Bewegungsgleichung für die Elektronen vernachlässigt werden. Die Ionenbeschleunigung wird hier vernachlässigt, weil die untersuchte Schwingungsfrequenz klein gegen die Stoßfrequenz  $\nu_i$  ist, das heißt  $\omega \ll \nu_i$ .

Für Neon erhält man z. B. bei einem Druck  $p = 0,15$  Torr eine Stoßfrequenz der Größe  $\nu_i \approx$

$2 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$ , so daß für Frequenzen  $\omega = 2\pi f \ll 2 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$  obige Vernachlässigung erlaubt ist. Die Dispersionsgleichung wird unter Berücksichtigung dieser Vernachlässigung hergeleitet.

Als Randbedingungen für die Diff.-Gln. werden die Schottkyschen Bedingungen verwendet, d. h. die Elektronendichte am Rand der Plasmasäule ist gleich Null [ $n(r=R) = 0$ ].

Die bekannte stationäre Lösung der obigen Diff.-Gln. ist eine Besselsche Funktion nullter Ordnung für die Dichteverteilung

$$n_0(r) = N_0 \cdot J_0(\beta_0 r) \quad (7)$$

mit  $\beta_0 = a_0/R$ , wobei  $a_0$  die 1. Nullstelle von  $J_0(x)$  ist.

Für die Potentialverteilung  $V_0(r)$  und die Ionisationsrate  $Z$  ergibt sich daraus

$$dV_0/dr = \frac{D_{eo}}{b_{eo} + b_{io}(\omega_e \tau_e)^2} \cdot \frac{1}{n_0(r)} \cdot \frac{dn_0}{dr} \quad (8)$$

$$Z = D_a(a_0/R)^2 = \frac{D_{eo} \cdot b_{io}}{b_{eo}} \cdot \left[ \frac{\beta_0^2}{1 + \frac{b_{io}}{b_{eo}} (b_{eo} B)^2} \right]. \quad (9)$$

Dabei ist  $D_{eo}$  der Diffusionskoeffizient,  $b_{eo}$  die Beweglichkeit der Elektronen für  $B=0$ ,  $b_{io}$  die Beweglichkeit der Ionen für  $B=0$ ,  $\omega_e$  die Gyrationfrequenz der Elektronen,  $\tau_e = 1/\nu_e$  die Stoßzeit für Stöße Elektronen – Neutralgasatome.

$$D_a = \frac{b_e D_i + b_i D_e}{b_e + b_i}$$

ist der ambipolare Diffusionskoeffizient, mit

$$b_e = \frac{b_{eo}}{1 + (b_{eo} B)^2},$$

$$b_i = \frac{b_{io}}{1 + (b_{io} B)^2},$$

$$D_e = \frac{D_{eo}}{1 + (b_{eo} B)^2},$$

$$D_i = \frac{D_{io}}{1 + (b_{io} B)^2}.$$

Zwischen den Diffusionskoeffizienten, den Beweglichkeiten und Energien der Elektronen und Ionen bestehen folgende Beziehungen:

$$D_{eo} = k T_e / m_e \nu_e = b_{eo} U_e, \quad (10)$$

$$D_{io} = k T_i / m_i \nu_i = b_{io} U_i. \quad (11)$$

Dabei werden für die Elektronenenergie und Ionenenergie die folgenden Umrechnungen verwendet

$$e U_e = k T_e, \quad e U_i = k T_i. \quad (12)$$

Für die stationäre axiale Elektronendrift gilt

$$v_{eo} = b_{eo} E.$$

Zur Untersuchung des Stabilitätsverhaltens der obigen Gleichungen werden Störungen folgender Form diskutiert:

für die Dichte wird

$$n(r) = n_0(r) + \tilde{n}(r) e^{i(m\varphi + kz - \omega t)},$$

für das Potential

$$V(r) = V_0(r) + \tilde{V}(r) e^{i(m\varphi + kz - \omega t)},$$

angesetzt. Der Wellenansatz  $f(r) e^{i(m\varphi + kz - \omega t)}$  beschreibt Zylinderwellen,  $k$  ist dabei die Wellenzahl für eine Ausbreitung in  $z$ -Richtung (Zylinderachse),  $m$  ist die ganzzahlige azimutale Wellenzahl,  $\omega$  die Wellenfrequenz. Vorgegebene Randwerte für die Schwankungen der Elektronendichte  $\tilde{n}$  führen zu einer Einschränkung der möglichen  $k$ -Werte.

Für die Randbedingungen an den Gefäßenden

$$\tilde{n} = 0 \quad \text{für } z=0 \quad \text{und } z=L$$

ergeben sich als mögliche  $k$ -Werte

$$k = n \pi / L \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (13)$$

d. h. es ist immer  $k \geqq \pi / L$ .

$$\left\{ -i\omega - Z - b_{io} i k E + k^2 D_{eo} + \frac{i m}{r} \cdot \frac{b_{eo}}{\omega_e \tau_e} \cdot \frac{dV_0}{dr} + \frac{D_{eo}}{(\omega_e \tau_e)^2} \cdot \frac{m^2}{r^2} \right\} \tilde{n} - \frac{D_{eo}}{(\omega_e \tau_e)^2} \cdot (\Delta \tilde{n})_\perp \\ + \frac{b_{eo}}{(\omega_e \tau_e)^2} \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \left( \tilde{n} \frac{dV_0}{dr} + n_0 \frac{d\tilde{V}}{dr} \right) \right] - \left\{ k^2 b_{eo} n_0 + \frac{i m}{r} \cdot \frac{b_{eo}}{\omega_e \tau_e} \cdot \frac{dn_0}{dr} + \frac{m^2}{r^2} \cdot \frac{b_{eo}}{(\omega_e \tau_e)^2} \cdot n_0 \right\} \tilde{V} = 0, \quad (16)$$

$$(-i\omega - Z) \tilde{n} + b_{io} k^2 n_0 \tilde{V} + \frac{b_{io} m^2}{r^2} \cdot n_0 \tilde{V} - b_{io} \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left[ r \left( n_0 \frac{d\tilde{V}}{dr} + \tilde{n} \frac{dV_0}{dr} \right) \right] = 0. \quad (17)$$

Diese Gleichungen werden auch von KADOMTSEV und NEDOSPASOV<sup>6</sup> benutzt sowie von JOHNSON und JERDE<sup>6</sup>. In<sup>6</sup> fehlt das Glied  $D_{eo}/(\omega_e \tau_e)^2 \cdot (m^2/r^2)$ , was aber bei der Voraussetzung  $(\omega_e \tau_e)^2 \gg 1$  von untergeordnetem Einfluß ist.

Der radiale Verlauf der Dichteschwankung  $\tilde{n}(r)$  sowie der Schwankung des elektrischen Potentials  $\tilde{V}(r)$  kann aus den Diff.-Gln. (16) und (17) berechnet werden. Dies ist im allgemeinen nur numerisch möglich.

Aus diesem Grund wird folgendes Näherungsverfahren durchgeführt:

Der Verlauf der Dichtestörung  $\tilde{n}(r)$  und der Verlauf der elektrischen Potentialstörung  $\tilde{V}(r)$  werden

Dagegen ergeben sich für die Randbedingungen

$$\tilde{n} = \tilde{n}_{\max} \quad \text{für } z=0$$

$$\tilde{n} = 0 \quad \text{für } z=L$$

als mögliche  $k$ -Werte

$$k = n \pi / 2 L \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (14)$$

In diesem Fall ist immer  $k \geqq \pi / 2 L$ .

Bei vorgegebenen Randbedingungen an den Gefäßenden  $z=0$  und  $z=L$  ist die Wellenzahl  $k$  reell. Die Wellenfrequenz ist dann im allgemeinen komplex

$$\omega = \omega_r + i \omega_i. \quad (15)$$

Der Realteil  $\omega_r$  bestimmt die Phasengeschwindigkeit  $v_p$  der Welle in  $z$ -Richtung,  $v_p = \omega_r / k$ , und der Imaginärteil  $\omega_i$  die Anwachs- bzw. Dämpfungskonstante.

Führt man die obigen Ansätze in die beiden Diff.-Gln. (5) und (6) ein, so erhält man mit der Voraussetzung  $(\omega_e \tau_e)^2 \gg 1$  und mit

$$(\Delta \tilde{n})_\perp = \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial r}$$

nach orthogonalen Bessel-Funktionen erster Ordnung entwickelt. Wir beschränken uns dabei auf das erste Glied der Entwicklung, d. h. für die Störungen  $\tilde{n}$  und  $\tilde{V}$  machen wir folgende Ansätze:

$$\tilde{n} = n_1 \cdot J_1(\beta_1 r), \quad (18)$$

$$\tilde{V} = V_1 \cdot J_1(\beta_1 r). \quad (19)$$

Dabei ist  $\beta_1 = \alpha_1 / R$ , wobei  $\alpha_1$  die erste Nullstelle von  $J_1(x)$  ist. Weitere Glieder in der Entwicklung werden in<sup>7</sup> und<sup>8</sup> berücksichtigt.

Mit Hilfe dieser Ansätze folgt für  $m=1$  nach Multiplikation mit  $r J_1(\beta_1 r)$  und Integration von  $r=0$  bis  $r=R$  unter Berücksichtigung der funktionalen Beziehungen zwischen den Besselschen Funktionen verschiedener Ordnung, sowie mit Verwendung der stationären Lösung

<sup>8</sup> R. R. JOHNSON u. D. A. JERDE, Phys. Fluids 5, 990 [1962].

$$[M \{ (\omega_i + k^2 D_{eo} + a_1) + i(k v_{eo} - \omega_r) \} + (b_1 + i c_1) T + d_1 S] \frac{n_1}{N_0} + \left[ i f_1 W + e_1 k^2 N + g_1 O + h_1 \cdot \left( \beta_1 P - 2 Q + \frac{1}{\beta_1} O \right) \right] V_1 = 0, \quad (20)$$

$$[M \{ (\omega_i - Z) - i \omega_r \} + a_2 S + b_2 T] \frac{n_1}{N_0} + [c_2 k^2 N + 2 c_2 O + d_2 P + e_2 Q] V_1 = 0. \quad (21)$$

Es wurden dabei folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{D_{eo} \beta_1^2}{(b_{eo} B)^2} - Z, \\ b_1 &= - \frac{1}{b_{eo} B^2} \cdot \frac{\beta_0 D_{eo}}{b_{eo} + b_{io} (b_{eo} B)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 &= - b_{eo}, & a_2 &= - \frac{b_{io} \beta_1 \beta_0 D_{eo}}{b_{eo} + b_{io} (b_{eo} B)^2}, \\ f_1 &= \beta_0 / B, & b_2 &= \frac{b_{io} \beta_0 D_{eo}}{b_{eo} + b_{io} (b_{eo} B)^2}, \\ g_1 &= - 1/b_{eo} B^2, & c_2 &= b_{io}, \\ h_1 &= - \beta_1 / b_{eo} B^2, & d_2 &= b_{io} \beta_1^2, \\ M &= \int_0^R r \cdot J_1^2(\beta_1 r) dr & e_2 &= - 2 b_{io} \beta_1, \\ N &= \int_0^R r \cdot J_0(\beta_0 r) \cdot J_1^2(\beta_1 r) dr & &= R^2 \cdot 8,11059 \cdot 10^{-2}, \\ O &= \int_0^R \frac{1}{r} \cdot J_0(\beta_0 r) \cdot J_1^2(\beta_1 r) dr & &= R^2 \cdot 4,77028 \cdot 10^{-2}, \\ P &= \int_0^R r \cdot J_0(\beta_0 r) \cdot J_0^2(\beta_1 r) dr & &= 3,14812 \cdot 10^{-1}, \\ Q &= \int_0^R J_0(\beta_0 r) \cdot J_0(\beta_1 r) \cdot J_1(\beta_1 r) dr & &= R \cdot 1,06119 \cdot 10^{-1}, \\ S &= \int_0^R \frac{r J_1(\beta_1 r) J_0(\beta_0 r) J_1(\beta_0 r)}{J_0(\beta_0 r)} dr & &= - R^2 \cdot 3,76692 \cdot 10^{-2}, \\ T &= \int_0^R \frac{J_1(\beta_0 r) J_1^2(\beta_1 r)}{J_0(\beta_0 r)} dr & &= R \cdot 1,45904 \cdot 10^{-1}, \\ W &= \int_0^R J_1(\beta_0 r) \cdot J_1^2(\beta_1 r) dr & &= R \cdot 7,63490 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Die auftretenden Integrale wurden numerisch berechnet.

Den obigen Gln. (20) und (21) müssen die Amplituden  $n_1$  und  $V_1$  genügen, wenn sie eine Wellenausbreitung der Form  $f(r) e^{i(m\varphi + kz - \omega t)}$  beschreiben sollen. Es sind zwei homogene, lineare, algebraische Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} a_{11} n_1 + a_{12} V_1 &= 0, \\ a_{21} n_1 + a_{22} V_1 &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

zur Bestimmung der Amplituden  $n_1$  und  $V_1$ . Als notwendige Bedingung für die Existenz einer nicht-trivialen Lösung muß die Determinante des Gleichungssystems verschwinden. Diese Bedingung führt zu der Dispersionsgleichung

$$a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = 0. \quad (23)$$

Die komplexe Gl. (23) stellt einen impliziten Zusammenhang zwischen der vorgegebenen Wellenzahl  $k$  und der komplexen Frequenz  $\omega$  und den

Plasmaparametern dar. Trennt man Gl. (23) in Realteil und Imaginärteil, dann erhält man zwei lineare, gekoppelte, inhomogene Gleichungen zur Bestimmung des Realteils  $\omega_r$  und des Imaginärteils  $\omega_i$  der Schwingung. Aus ihnen ergeben sich folgende explizite Ausdrücke für  $\omega_r(k)$  und  $\omega_i(k)$ :

$$\omega_i(k) = -\frac{c(gk^3 + hk^2 + jk + l) + (dk^4 + ek^2 + f)(ak^2 + b)}{(ak^2 + b)^2 + c^2} \quad (24)$$

$$\omega_r(k) = \frac{1}{ak^2 + b} [c\omega_i(k) + gk^3 + hk^2 + jk + l]. \quad (25)$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} a &= MN(c_2 - e), \\ b &= M(\beta - \delta), \\ c &= -MWf_1, \\ d &= MN D_{eo} c_2, \\ e &= MD_{eo} \beta + N c_2 \alpha - Ne_1 \gamma, \\ f &= \alpha \beta - \gamma \delta, \\ g &= MN c_2 v_{eo}, \\ h &= NT c_2 c_1, \\ j &= M \beta v_{eo}, \\ l &= T \beta c_1 - W \gamma f_1, \\ a &= Ma_1 + Tb_1 + Sd_1, \\ \beta &= 2Oc_2 + Pd_2 + Qe_2, \\ \gamma &= Sa_2 + Tb_2 - MZ, \\ \delta &= Og_1 + h_1 (\beta_1 P - 2Q + \frac{1}{\beta_1} O) \end{aligned} \quad (26)$$

Mit Hilfe der obigen Gln. (24) und (25) kann eine Wellenausbreitung im Plasma einer positiven Säule und das Instabilitätsverhalten dieser Säule untersucht werden. Im folgenden Abschnitt werden diese beiden Gleichungen ausführlich diskutiert.

## II. Numerische Lösung der Dispersionsgleichung, Diskussion der Instabilitätsbereiche

Der stabile bzw. instabile Charakter der positiven Säule wird durch den Imaginärteil  $\omega_i(k)$  der Frequenz  $\omega$  bestimmt. Bei dem in Abschnitt I angenommenen Zeitverlauf  $e^{-i\omega t}$  bedeutet ein negativer Imaginärteil  $\omega_i < 0$  Stabilität und ein positiver Imaginärteil  $\omega_i > 0$  Instabilität. Der Übergang von stabilem zu instabilem Verhalten ist durch die Bedingung  $\omega_i = 0$  festgelegt.

Der Verlauf der Funktion  $\omega_i = \omega_i(k)$  wurde numerisch berechnet. Für die Plasmaparameter, die in obigen Formeln als Parameter eingehen, wurden folgende Beziehungen verwendet<sup>9</sup>:

$$b_{eo} = 0,966 \cdot 10^5 T_g/p P_m \sqrt{U_e}, \quad (27)$$

$$b_{io} = 11,42 T_g/p. \quad (28)$$

Es ist dabei  $p$  der Neutralgasdruck in Torr,  $T_g$  die Neutralgastemperatur in K,  $U_e$  die Elektronentemperatur in V,  $P_m$  die Stoßwahrscheinlichkeit nach<sup>10</sup>.

In Abb. 1 ist der Verlauf von  $\omega_i$  als Funktion der Wellenzahl  $k$  dargestellt. Parameter der Kurvenschar ist das axiale Magnetfeld  $B$ . Für dieses Bei-

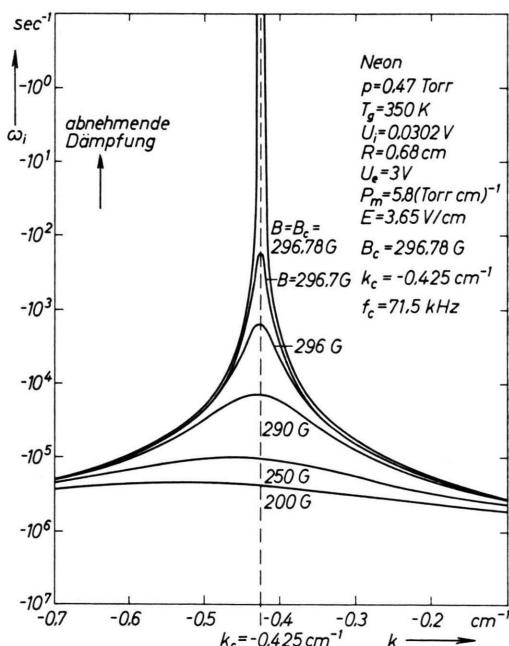


Abb. 1. Dämpfungskonstante  $\omega_i < 0$  als Funktion der Wellenzahl  $k$  mit Magnetfeld  $B$  als Parameter.

spiel werden die Plasmaparameter, wie sie in einer Neongasentladung vorliegen, gewählt:

$$E = 3,65 \text{ V/cm}, \quad R = 0,68 \text{ cm}, \quad p = 0,47 \text{ Torr},$$

$$T_g = 350 \text{ K}, \quad U_i = 0,0302 \text{ V}, \quad U_e = 3 \text{ V},$$

$$P_m = 5,8 \text{ (Torr cm)}^{-1}.$$

Man erkennt, daß bei kleinen Magnetfeldstärken die Frequenz  $\omega_i$  sehr große negative Werte annimmt ( $\omega_i \approx -10^5 \text{ sec}^{-1}$ ), d. h., daß die Schwingungen sehr stark gedämpft sind. Mit zunehmendem Ma-

<sup>9</sup> J. L. DELCROIX, Proc. of the 8th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Wien 1967, invited paper.

<sup>10</sup> S. C. BROWN, Basic Data of Plasma Physics, M.I.T. Press Cambridge (Massachusetts) 1959.

gnetheld verringert sich diese Dämpfung in einem bestimmten Bereich der Wellenzahl  $k$  sehr schnell. Bei einem kritischen Magnetfeld  $B_c$  und einer kritischen Wellenzahl  $k_c$  erreicht die Kurve  $\omega_i(k)$  den Wert Null. Für das obige Beispiel ergeben sich die kritischen Werte

$$k_c = -0,425 \text{ cm}^{-1}, \quad B_c = 296,78 \text{ G}.$$

Magnetfelder  $B > B_c$  führen innerhalb eines bestimmten  $k$ -Bereiches zu positiven  $\omega_i$ -Werten.

Aus dem berechneten Verlauf von  $\omega_i(k)$  erkennt man, daß für Magnetfelder  $B < B_c$  alle Wellen unabhängig von der Wellenlänge, d. h. unabhängig von  $k$ , stabil sind. Erst ab dem kritischen Magnetfeld  $B_c$  tritt für Wellen, deren Wellenlängen in einem bestimmten Bereich liegen, Instabilität auf. Dieser Bereich  $k_1 < k < k_2$  hängt von der Größe des Magnetfeldes  $B = B_i > B_c$  und den Plasmaparametern ab.

Das kritische Magnetfeld  $B_c$  und die kritische Wellenzahl  $k_c$  sind durch die Bedingungen

$$\omega_i(k) = 0; \quad d\omega_i(k)/dk = 0 \quad (29)$$

festgelegt<sup>6, 11</sup>. Durch dieses von Kadomtsev und Nedospasov eingeführte Instabilitätskriterium läßt sich das kleinstmögliche Magnetfeld, ab dem Instabilität auftritt, sowie die zugehörige Wellenzahl  $k_c$  bestimmen unabhängig davon, ob sich diese Wellenzahl in Gefäßeln endlicher Länge experimentell auch verwirklichen läßt. In der hier durchgeföhrten numerischen Behandlung wird gerade der Einfluß der Wellenzahl auf das stabile bzw. instabile Verhalten der Plasmasäule berücksichtigt.

Für Wellenzahlen, die sich stark von  $k_c$  unterscheiden, tritt erst bei größeren Magnetfeldern Instabilität auf. Zur Veranschaulichung des Verhaltens der  $\omega_i$ -Kurven im Kurvenmaximum sind in Abb. 2 die Verläufe der Anwachskonstanten  $\omega_i(k) > 0$  für große Magnetfelder  $B > B_c$  aufgetragen. Hieraus ist zu entnehmen, daß bei wachsender Magnetfeldstärke zunächst eine Verbreiterung des instabilen  $k$ -Bereiches auftritt. Bei weiterer Vergrößerung des Magnetfeldes verschiebt sich das Kurvenmaximum zu größeren  $k$ -Werten, wobei der instabile  $k$ -Bereich wieder enger wird. Die große Steilheit der Kurven in den Nullstellen  $\omega_i = 0$  ergibt eine scharf ausgeprägte Grenze zwischen den stabilen und instabilen  $k$ -Bereichen. Für das obige Zahlenbeispiel ergibt sich für

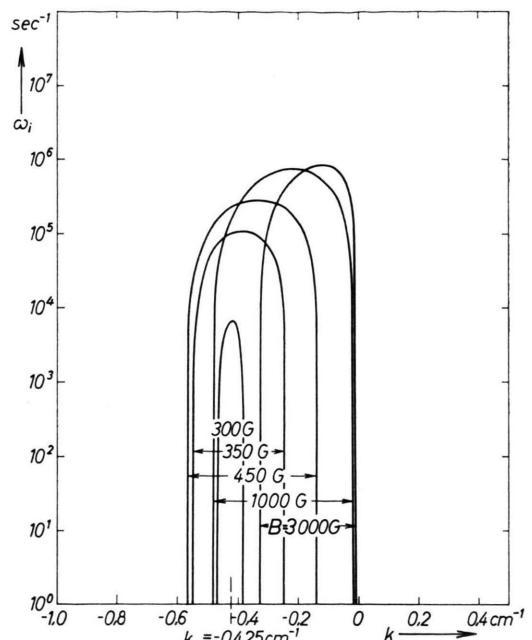


Abb. 2. Anwachskonstante  $\omega_i > 0$  als Funktion der Wellenzahl  $k$  mit Magnetfeld  $B$  als Parameter (Plasmakenngrößen siehe Abb. 1).

eine magnetische Feldstärke  $B = 450 \text{ G}$  ( $> B_c$ ) der Bereich

$$k_1 = -0,562 \text{ cm}^{-1} < k < k_2 = -0,139 \text{ cm}^{-1},$$

in dem instabiles Verhalten auftritt.

Abb. 3 zeigt den Verlauf des Realteils  $\omega_r(k)$  der Welle innerhalb eines Wellenzahl-Bereiches um  $k_c$ . Beispielsweise entnimmt man daraus, daß eine Welle mit den kritischen Daten  $B_c = 296,78 \text{ G}$ ,  $k_c = -0,425 \text{ cm}^{-1}$  eine Schwingungsfrequenz  $f = \omega_r/2\pi = 71,5 \text{ kHz}$  besitzt. Charakteristisch ist, daß im Wellenzahlbereich um  $k_c$  beim Übergang von stabilem zu instabilem Verhalten, d. h. von  $\omega_i < 0$  zu  $\omega_i > 0$ , die Kurven für die Frequenz  $\omega_r(k)$  kein außergewöhnliches Verhalten zeigen. Für die in Abb. 3 gewählten Magnetfeldstärken ergeben sich die Frequenzen  $f$  in der Größenordnung 50 – 100 kHz.

#### Darstellung der Instabilitätsbereiche in einem $k$ - $B$ -Diagramm

Bei der Diskussion der  $\omega_i(k)$ -Kurven im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, daß sich für feste Plasmaparameter  $p$ ,  $T_g$ ,  $R$ ,  $U_e$ ,  $P_m$ ,  $E$  und vorgegebener magnetischer Feldstärke  $B > B_c$  zwei Nullstellen  $k_1$  und  $k_2$  ergeben. Diese Nullstellen  $k_1$  und

<sup>11</sup> R. J. BRIGGS, Electron-Stream Interaction with Plasmas, M.I.T. Press, Cambridge (Massachusetts) 1964.

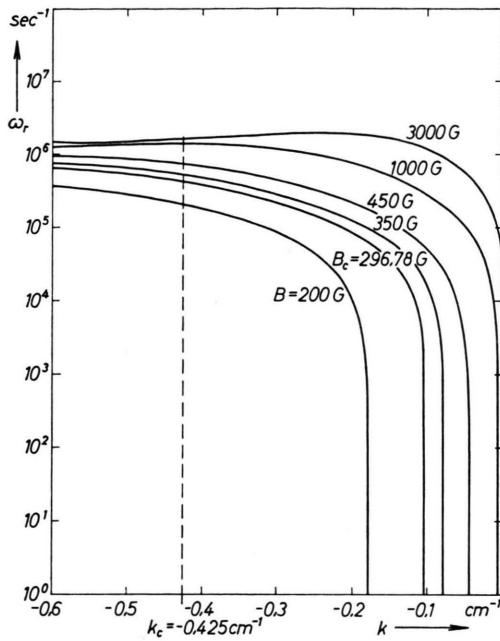


Abb. 3. Frequenz  $\omega_r$  als Funktion der Wellenzahl  $k$  mit Magnetfeld  $B$  als Parameter (Plasmakenngrößen siehe Abb. 1).

$k_2$  sind in Abb. 4 in Abhängigkeit vom Magnetfeld  $B$  und den angegebenen Plasmaparametern dargestellt.

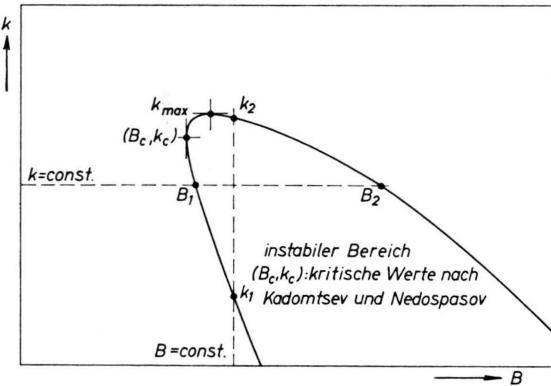


Abb. 4. Wellenzahl  $k$  in Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke  $B$ .

Die Kurve der Nullstellen  $\omega_i(k, B) = 0$  trennt den stabilen und den instabilen Bereich. Für eine Welle mit vorgegebener Wellenzahl  $k$  tritt nur in einem Bereich der Magnetfeldstärke  $B_1 < B < B_2$  instabiles Verhalten auf. In der Darstellung von Abb. 4 erkennt man, daß für  $k > k_{\max}$  keine Instabilität mehr eintreten kann. Das bedeutet, daß positive Säulen mit Längen  $L < \pi/k_{\max}$  stabil sind. Für nur wenig

längere Gefäße tritt Instabilität bei Magnetfeldstärken  $B = B_i > B_c$  auf. Für relativ lange Gefäße mit  $L \gg \pi/k_{\max}$ , in denen sich neben langen Wellen auch kurze Wellen ausbreiten, ist der Beginn der Instabilität durch das kritische Magnetfeld  $B_c$  bestimmt. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß bei vorgegebener Gefäßlänge die Wellenzahl  $k$  keine kontinuierliche Variable ist, sondern durch die Gl. (13) und (14) festgelegt ist, was sich auf die Bestimmung des kritischen Magnetfeldes  $B_i$  auswirkt.

In Abb. 4 wurde für eine Welle mit vorgegebener Wellenzahl  $k$  der instabile Magnetfeldbereich eingezeichnet, außerdem für eine vorgegebene magnetische Feldstärke  $B$  der zugehörige instabile Wellenzahlen-Bereich.

In den Abb. 5 bis 7 wurden verschiedene Parameter variiert. Summarisch ergibt sich aus diesen Darstellungen, daß wachsende Werte des Druckes  $p$ , der Elektronentemperatur  $U_e$ , der Stoßwahrschein-

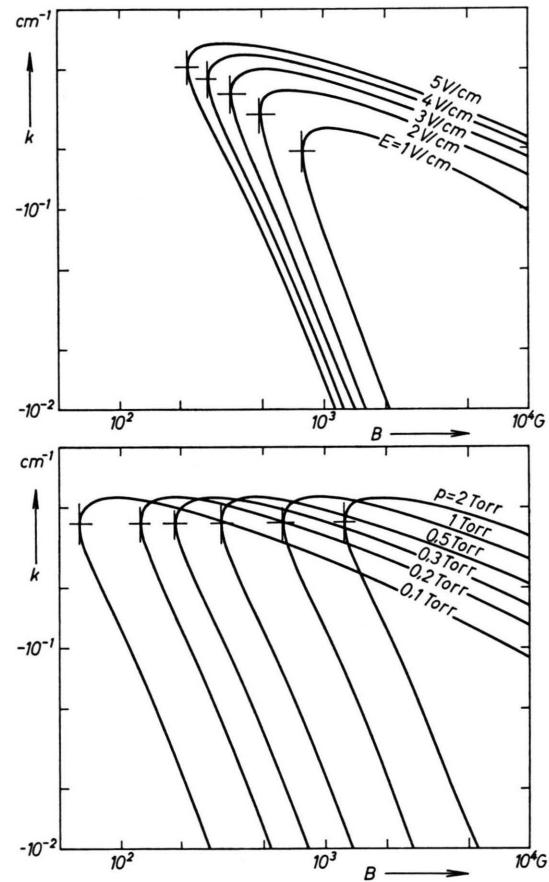


Abb. 5.  $k$ - $B$ -Diagramm mit der elektrischen Feldstärke  $E$  bzw. dem Gasdruck  $p$  als Parameter. (Ungeänderte Plasmakenngrößen siehe Abb. 1)

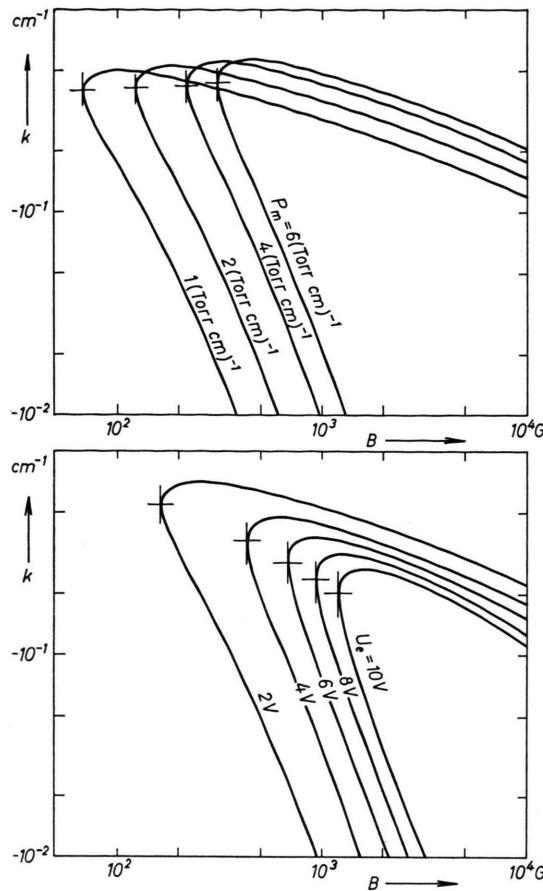


Abb. 6.  $k$ - $B$ -Diagramm mit der Elektronentemperatur  $U_e$  bzw. der Stoßwahrscheinlichkeit  $P_m$  als Parameter (ungeänderte Plasmakenngrößen siehe Abb. 1).

lichkeit  $P_m$  und fallende Werte der Neutralgastemperatur  $T_g$ , der elektrischen Feldstärke  $E$  und des Gefäßradius  $R$  eine Erhöhung des kritischen Magnetfeldes bewirken, wenn jeweils die anderen Parameter konstant gehalten werden.

#### *Instabilitätsbereiche bei Berücksichtigung der Kopplung der Plasmaparameter*

Während in den obigen Darstellungen (Abb. 5 bis 7) die einzelnen Plasmaparameter, z. B. elektrisches Feld  $E$ , Elektronentemperatur  $U_e$ , Gastemperatur  $T_g$ , Stoßwahrscheinlichkeit  $P_m$  unabhängig voneinander und unabhängig vom Magnetfeld variert wurden, ist diese freie Variation im allgemeinen nicht möglich. So bewirkt z. B. die Variation der elektrischen Feldstärke  $E$  zugleich eine Abänderung der Elektronentemperatur  $U_e$ . Bei konstanter Stromstärke ist das elektrische Feld  $E$  eine Funktion des

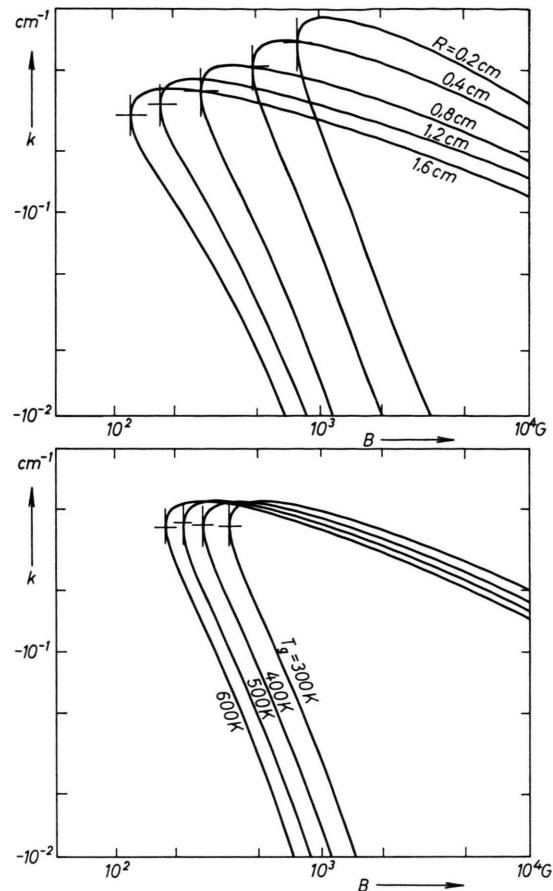


Abb. 7.  $k$ - $B$ -Diagramm mit der Neutralgastemperatur  $T_g$  bzw. dem Gefäßradius  $R$  als Parameter (ungeänderte Plasmakenngrößen siehe Abb. 1).

Magnetfeldes  $B$ . Die Plasmaparameter sind über die stationäre Lösung der positiven Säule miteinander gekoppelt. Hierzu ist unter anderem die Lösung der Energiegleichung und die Kenntnis der Ionisationsrate  $Z$  notwendig.

Die experimentellen Untersuchungen wurden bei konstantem Entladungsstrom durchgeführt. Damit ergibt sich bei einer Änderung des äußeren Magnetfeldes im klassischen, diffusionsbestimmten Bereich eine Verringerung der axialen elektrischen Feldstärke  $E$ . Gleichzeitig ändert sich mit wachsendem Magnetfeld  $B$  die Elektronentemperatur  $U_e$ .

Um den Einfluß dieser Kopplung auf die theoretischen Ergebnisse aufzuzeigen, wurden die elektrische Feldstärke  $E$  und die Elektronentemperatur  $U_e$  als Funktionen der magnetischen Feldstärke  $B$  systematisch variiert. Die formal angenommenen Abhängigkeiten sind in Abb. 8 dargestellt. Der im An-

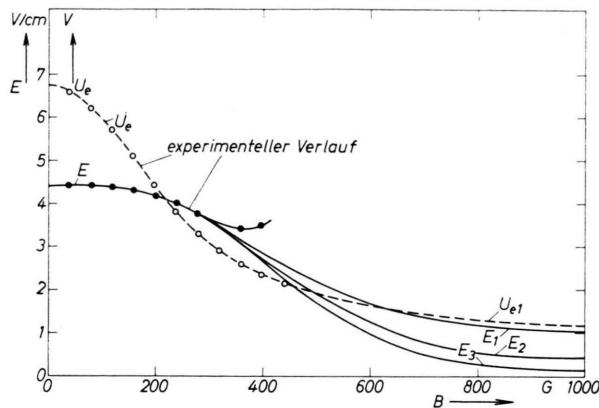


Abb. 8. Formal angenommene Abhängigkeit der Elektronentemperatur  $U_{e1}$  und des elektrischen Feldes  $E_{1,2,3}$  von der Magnetfeldstärke  $B$ .

fangsbereich experimentell bestimmte Verlauf  $E(B)$  und  $U_e(B)$  wird zunächst benutzt und durch angenommene Verläufe in den höheren  $B$ -Bereich fortgesetzt.

Die Abhängigkeit der Stoßwahrscheinlichkeit  $P_m$  von der Elektronentemperatur  $U_e$  ist bekannt<sup>9</sup>. Die restlichen Plasmaparameter  $p$ ,  $R$ ,  $T_g$  bleiben konstant. Bei der Bestimmung der Nullstellen der Anwachsraten  $\omega_i(k)$  und damit der Festlegung der Instabilitätsbereiche werden diese Abhängigkeiten der Plasmaparameter vom magnetischen Feld berücksichtigt. Die Auswirkung dieser Abhängigkeit auf die Lage und Form der Instabilitätsbereiche ist in Abb. 9 zu erkennen.

$U_{e1}(B)$  nach Abb. 8 voraus, dann ergibt sich ein Instabilitätsbereich nach Kurve a in Abb. 9, der sich nur wenig vom Instabilitätsbereich mit festen Plasmaparametern unterscheidet. Liegt jedoch ein Verlauf für das elektrische Feld  $E_2(B)$  bei gleichem Verlauf  $U_{e1}(B)$  vor, so ergibt sich eine Verformung des Instabilitätsbereiches (Abb. 9, Kurve b), die bei einer weiteren Absenkung der elektrischen Feldstärke wie z. B. nach Kurve  $E_3(B)$  (Abb. 8) zu einer Aufteilung in zwei getrennte Instabilitätsbereiche führt (Abb. 9, Kurve c). Eine solche Aufteilung in getrennte Instabilitätsbereiche bedeutet, daß auch positive Säulen großer Länge in einem bestimmten Zwischenbereich des Magnetfeldes wieder stabil sind. Ein ähnlich kompliziertes Verhalten der positiven Säule tritt bei anderen Kopplungen der Plasmaparameter untereinander auf.

Aus diesem Verhalten folgt, daß zur Diskussion des Stabilitätsverhaltens der positiven Säule eine genaue Kenntnis der Kopplung der Plasmaparameter untereinander notwendig ist. Weiter muß z. B. auch die Abänderung des Dichteprofils  $n_0(r)$  durch das magnetische Feld berücksichtigt werden. Zu beachten ist außerdem, daß das Stabilitätsverhalten in linearer Näherung untersucht wird, d. h. es wird stets vorausgesetzt, daß die Störungen klein sind. Im instabilen Bereich können jedoch die Störungsamplituden groß werden, so daß die stationären Plasmaparameter nicht mehr unabhängig von den Störungsamplituden selbst sind.

Die hier durchgeführte lineare Theorie ist jedoch zur Festlegung der Instabilitätsbereiche geeignet.

### III. Experimentelle Anordnung und Meßergebnisse

Der Zweck der Experimente war die Messung des Zusammenhangs zwischen der elektrischen Feldstärke  $E$  und der Magneteninduktion  $B$ , sowie die Bestimmung des Instabilitätsbereiches und des zugehörigen Frequenzspektrums bei verschiedenen Längen der positiven Säule in Niederdruck-Gasentladungen.

Die Entladungsgefäße aus Pyrexglas wiesen Radien von 0,68 cm (Gefäß 1) und 0,625 cm (Gefäß 2) auf. In einem daran angesetzten Rohrstück mit größerem Durchmesser wurde die indirekt geheizte Oxydkathode betrieben. Durch Verschieben der Anode konnte bei Gefäß 1 die Länge der positiven Säule zwischen  $L=8,5$  cm und  $L=30$  cm verändert werden. Das Magnetfeld für diese Anordnung erreichte eine maximale Induktion  $B=800$  G. Die positive Säule lag dabei ganz im homogenen Bereich des Feldes.

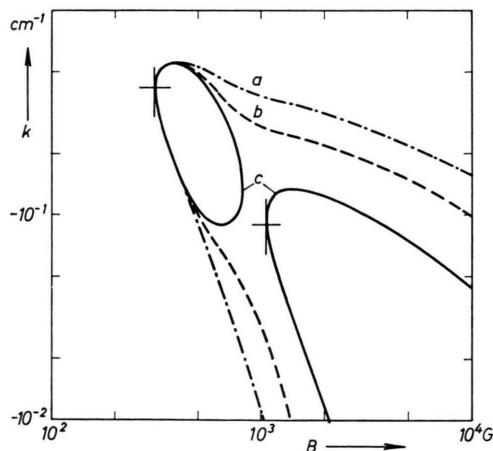


Abb. 9.  $k$ - $B$ -Diagramm für die Verläufe  $U_{e1}/E_1$  (Kurve a),  $U_{e1}/E_2$  (Kurve b) und  $U_{e1}/E_3$  (Kurve c) der Abb. 8.

Setzt man z. B. einen Verlauf der elektrischen Feldstärke  $E_1(B)$  und der Elektronentemperatur

Gefäß 2 war 40 cm lang; 20 cm der positiven Säule konnten einem in diesem Bereich homogenen Magnetfeld bis  $B = 2,6$  kG ausgesetzt werden.

Zur Messung der axialen elektrischen Feldstärke der positiven Säule waren zwei zylindrische Langmuir-Sonden eingebaut, die im Abstand von 17,5 mm bis in die Mitte des Entladungsrohres ragten. Die Sonden bestanden aus 0,1 mm Wolfram-Draht, der bis auf ein 1 mm langes freies Ende mit einem 0,5 mm dicken  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Röhrchen isoliert war.

Ein Lichtleiter führte die hochfrequenten Lichtschwankungen des Plasmas zu einem Photovervielfachern.

Abb. 10 zeigt die Anordnung des Gefäßes 1 im Spulenpaar. Die Anode war mit Kühlfaßnissen versehen, Federn hielten sie zentrisch im Glasrohr.

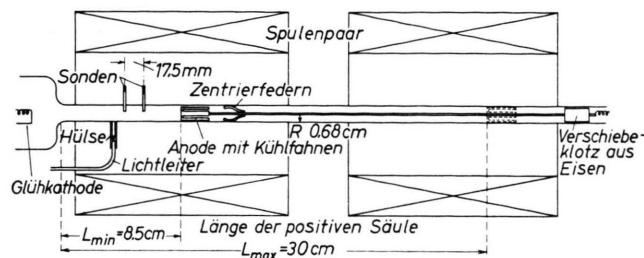


Abb. 10. Anordnung des Gefäßes 1 im Spulenpaar ( $R = 0,68$  cm).

In Abb. 11 ist die Meßschaltung dargestellt. Die Spannung zwischen den Sonden als Maß der elektrischen Achsfeldstärke wurde auf den  $y$ -Eingang eines  $x-y$ -Schreibers gegeben. Der  $x$ -Wert des Schreibers war

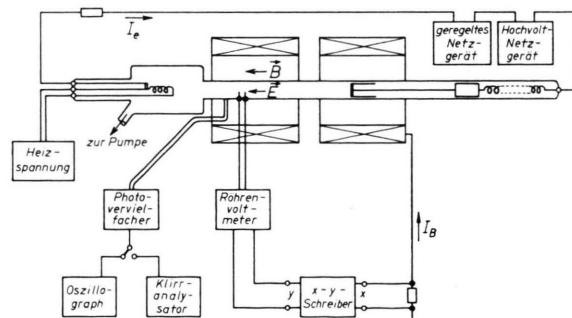


Abb. 11. Betriebs- und Meßschaltung.

dem Magnetfeld proportional. Mit dem Photovervielfachern konnten Lichtschwankungen des Plasmas bis etwa 10 MHz gemessen werden. Eine Hülse vor dem Lichtleiterende schränkte den Einfall seitlichen Lichts ein. Die aufgenommenen Schwingungen wurden teils vom Bildschirm eines Oszilloscopes photographiert, teils mit einem Kirschanalysator auf ihr Spektrum hin untersucht.

In Abb. 12 sind die mit dem Schreiber aufgenommenen Kurven der elektrischen Achsfeldstärke  $E$  als Funktion der axialen Magnetfeldinduktion  $B$  für Neon bei Drucken  $p = 0,47/0,12/0,073/0,064$  Torr dargestellt.

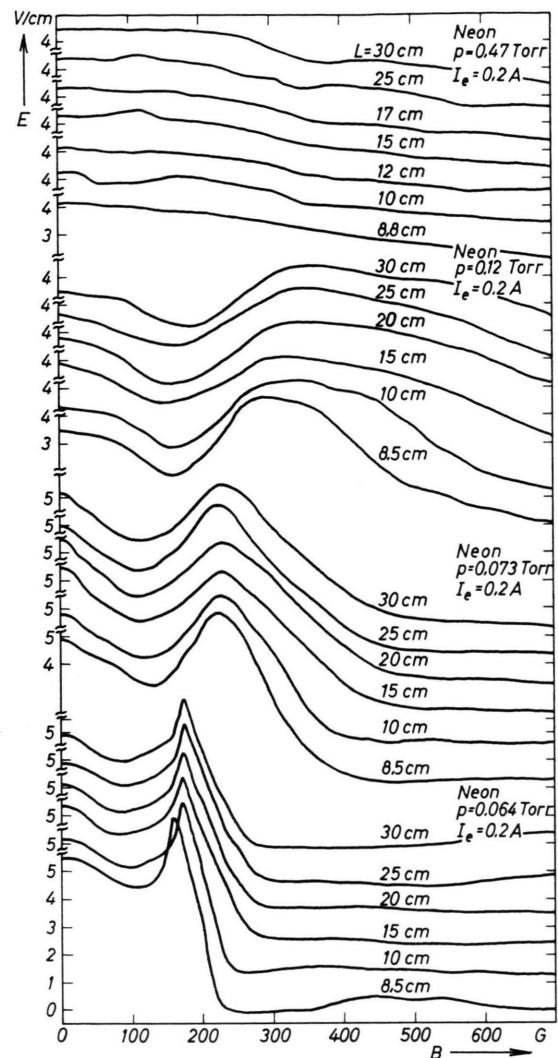


Abb. 12. Elektrische Achsfeldstärke  $E$  als Funktion der Magnetfeldinduktion  $B$ . (Neon  $p = 0,47/0,12/0,073/0,064$  Torr, Gefäß 1.) Parameter ist die Säulenlänge  $L$ .

Der Entladungsstrom betrug  $I_e = 0,2$  A. Die Meßkurven wurden bei verschiedenen Längen der positiven Säule zwischen  $L = 30$  cm und  $L = 8,5$  cm aufgenommen. Der Deutlichkeit halber sind die Kurven in  $E$ -Richtung gegeneinander versetzt gezeichnet.

Der experimentell bestimmte Kurvenverlauf  $E = f(B)$  kann in 5 charakteristische Bereiche eingeteilt werden. Abb. 13 zeigt diese schematische Einteilung.

Bereich I ist gekennzeichnet durch die Abnahme der elektrischen Feldstärke der Entladung auf Grund verringelter Diffusionsverluste zur Gefäßwand. Er wird als normaler Diffusionsbereich bezeichnet. Der Beginn des Bereiches II (Instabilitätsbereich) wird durch den Wendepunkt beim Magnetfeld  $B_w$  bestimmt. Bei diesem Magnetfeld  $B_w$  beginnt die Instabilität, die zu größeren Diffusionsverlusten führt. Das Minimum der elektri-

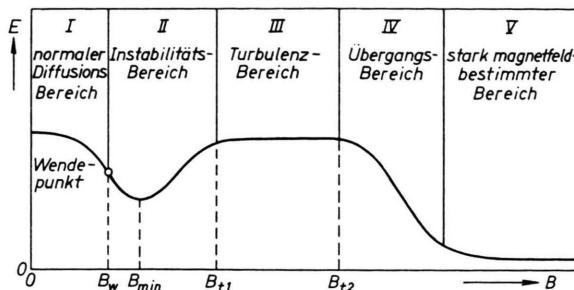


Abb. 13. Einteilung des Kurvenverlaufs  $E=f(B)$  in die Gebiete I bis V.

schen Feldstärke wird beim Magnetfeld  $B_{min}$  erreicht. Das Ende des Bereiches II ist durch das Ende des Anstiegs des elektrischen Feldes beim Magnetfeld  $B_{t1}$  festgelegt.

Im anschließenden Bereich III ist die elektrische Feldstärke vom Magnetfeld nahezu unabhängig. Dieser Bereich wird meist als turbulenter Bereich bezeichnet. Es zeigt sich, daß die Breite des turbulenten Bereiches von den Plasmaparametern wie z. B. der Länge des Gefäßes oder dem Druck abhängt.

Im Bereich IV (Übergangsbereich) nimmt vom Magnetfeld  $B_{t12}$  an die Längsfeldstärke  $E$  erneut ab. Der Bereich V (stark magnetfeldbestimmter Bereich) ist durch sehr kleine elektrische Feldstärken gekennzeichnet.

In Abb. 12 sind bei einem Druck  $p=0,47$  Torr bei Gefäßlängen  $20 \text{ cm} < L < 30 \text{ cm}$  die Bereiche II und III nur schwach ausgeprägt.

Bei kürzeren Gefäßlängen ( $L < 15 \text{ cm}$ ) entfallen die Bereiche II–IV. Es tritt keine Kadomtsev-Instabilität mehr auf. Die positive Säule erreicht auch für große Magnetfelder kein Minimum der elektrischen Feldstärke mehr.

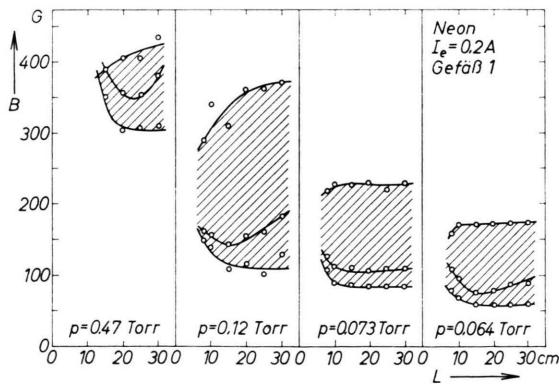


Abb. 14. Experimentell bestimmte Instabilitätsbereiche als Funktion der Säulenlänge  $L$  für Neon  $p=0,47/0,12/0,073/0,064$  Torr;  $I_e=0,2 \text{ A}$ , Gefäß 1. Die untere Grenze des Bereichs ist durch das Feld  $B_w$ , die obere durch das Feld  $B_{t2}$  bestimmt. Im schraffierten Instabilitätsbereich ist die Größe des Magnetfeldes  $B_{min}$  eingetragen.

Die in Abb. 12 weiter gezeigten Meßergebnisse lassen die verschiedenen Bereiche mit Ausnahme des Bereiches III gut erkennen. Mit fallendem Gasdruck  $p$  und abnehmender Gefäßlänge  $L$  wird der Übergang von Bereich II nach Bereich IV immer schärfer. Ebenso werden die Minima der elektrischen Feldstärke bei  $B_{min}$  und die Maxima bei  $B_{t1}$  ausgeprägter.

In Abb. 14 ist für verschiedene Gasdrücke der experimentell bestimmte Instabilitätsbereich zwischen den Magnetfeldinduktionen  $B_w$  und  $B_{t2}$ , das hier mit  $B_{t1}$  zusammenfällt, als Funktion der Säulenlänge  $L$  angegeben. Im schraffierten Instabilitätsbereich ist der Verlauf der Größe  $B_{min}$  eingetragen.

Man erkennt, daß die Einsatz der Instabilität beim Magnetfeld  $B_w$  für Säulenlängen  $L > 20 \text{ cm}$  nicht mehr von der Länge der positiven Säule abhängt; dasselbe gilt für die obere Grenze des instabilen Bereiches bei  $B_{t2}$ . Bei niedrigen Drücken tritt diese Längenunabhängigkeit schon bei kleineren Gefäßlängen auf. Im Beispiel mit dem Druck  $p=0,47$  Torr endet der Instabilitätsbereich bei einer Grenzlänge  $L=L_g$  von etwa 10 cm. In Gefäßen mit Längen  $L < L_g$  tritt keine Instabilität mehr auf. Auch in den anderen dargestellten Beispielen können durch Extrapolation die entsprechenden Grenzlängen bestimmt werden. Dies ist in Übereinstimmung mit dem theoretischen Ergebnis, daß kurze positive Säulen stabil sind.

Eine Zusammenstellung der Magnetfeldinduktion  $B_{min}$  ist in Abb. 15 für die Gase Neon, Argon, Krypton und Xenon gegeben. Die Messungen gelten für das Gefäß 2.

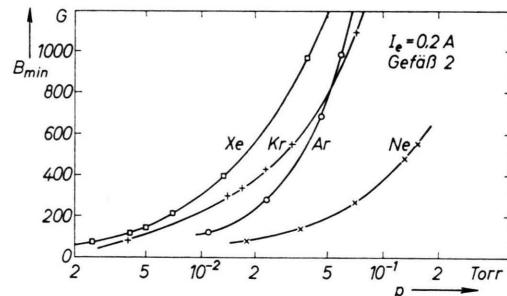


Abb. 15. Magnetfeldstärke  $B_{min}$  in Abhängigkeit vom Gasdruck  $p$  für die Gase Neon, Argon, Krypton, Xenon.

Die Steigung  $-\Delta E / \Delta B$  der im Bereich IV fallenden Kurve  $E=f(B)$  ist aus Abb. 12 entnommen und als Funktion der Säulenlänge  $L$  in Abb. 16 wiedergegeben. Für Längen  $L > 20 \text{ cm}$  ist die Steigung nur noch druck- aber nicht mehr längenabhängig.

Die Untersuchung des Frequenzspektrums wurde an Neon (Gefäß 2,  $p=0,16$  Torr,  $I_e=0,4 \text{ A}$ ) bei verschiedenen Magnetfeldern vorgenommen. Die Meßpunkte sind in Abb. 17 eingetragen.

Das gemessene Spektrum im Frequenzbereich zwischen  $f=30 \text{ kHz}$  und  $f=120 \text{ kHz}$  ist in Abb. 18 wiedergegeben. Beim Magnetfeld  $B=460 \text{ G}$  tritt eine starke Emission bei  $f \approx 100 \text{ kHz}$  auf. Damit tritt diese Emission bei Erreichen des mit  $B_w$  bezeichneten Magnetfel-

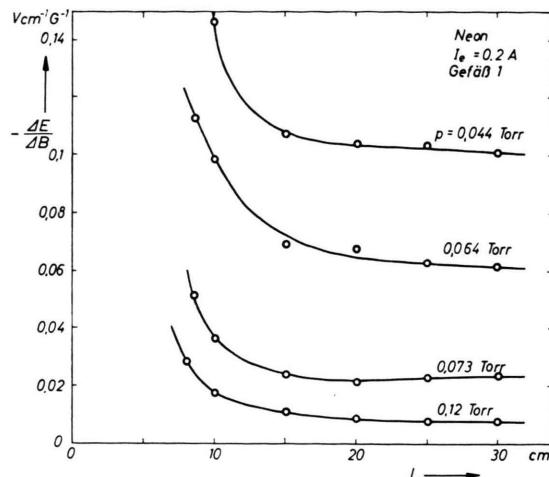


Abb. 16. Steigung  $-\frac{\Delta E}{\Delta B}$  im Bereich IV als Funktion der Säulenlänge  $L$ .

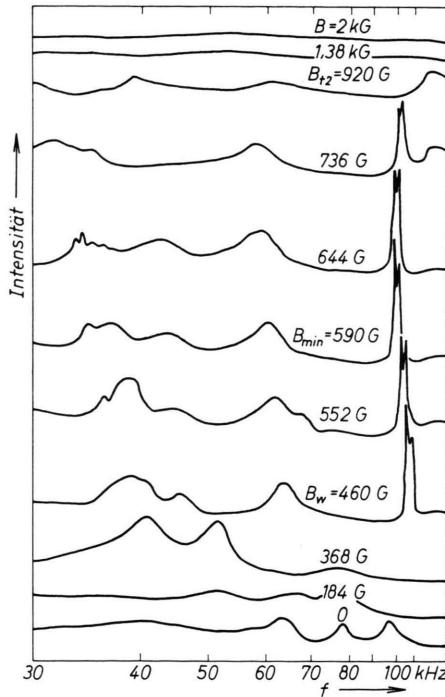


Abb. 18. Frequenzspektrum zwischen 30 kHz und 120 kHz. (Die Meßpunkte sind in Abb. 17 in die  $E$ - $B$ -Kurve eingetragen.)

des auf und hat in diesem Fall den Wert  $B_w = 460 \text{ G}$ . Die maximale Intensität wird bei  $B \approx B_{\min} = 590 \text{ G}$  registriert. Höhere Magnetfelder führen zu einer Verringerung der Intensität, bis schließlich bei  $B \approx 920 \text{ G}$ , welches dem Magnetfeld  $B_{t2}$  entspricht, die Schwingung verschwindet. Für Felder  $B > 920 \text{ G}$  ist die Entladung wieder stabil.

Eine photographische Registrierung der Lichtschwankungen (Einmalablenkung im Oszilloskop) gibt bei

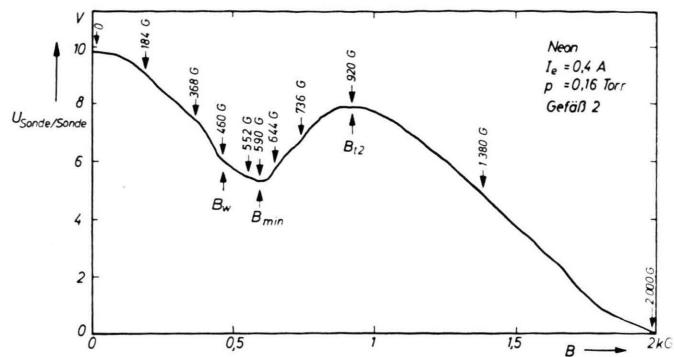


Abb. 17. Meßpunkte in der  $E = f(B)$ -Kurve für die Aufnahme des Frequenzspektrums.

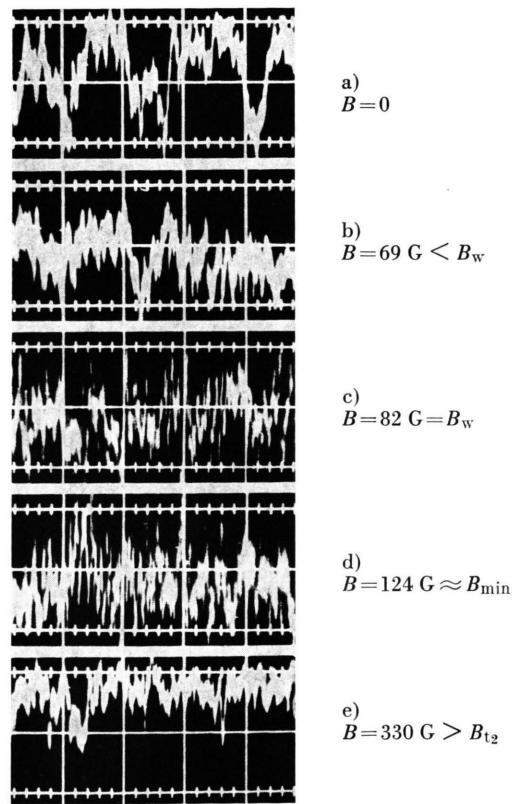


Abb. 19. Lichtemission als Funktion der Zeit (Ordinate 50 mV/Teilung; Abszisse 10  $\mu\text{s}/\text{Teilung}$ ) bei Neon,  $p = 0.073 \text{ Torr}$ ,  $L = 30 \text{ cm}$ , Gefäß 1.

Neon (Gefäß 1,  $p = 0.073 \text{ Torr}$ ,  $L = 30 \text{ cm}$ ,  $I_e = 0.2 \text{ A}$ ) die in Abb. 19 a – e gezeigten Bilder (Zeitachse 10  $\mu\text{s}/\text{Teilung}$ ; Intensität 50 mV/Teilung).

Die Abb. 19 a und b zeigen die Lichtemission als Funktion der Zeit bei den Magnetfeldern  $B = 0 \text{ G}$  und  $B = 69 \text{ G}$  im Bereich I. Die niederfrequenten Schwingungen röhren von laufenden Schichten in der positiven Säule her.

Die Abb. 19 c und d sind bei den Magnetfeldern  $B = B_w = 82$  G und bei  $B = 124$  G  $\approx B_{\min}$  im Bereich II aufgenommen. Sie zeigen ein durch das Auftreten der Instabilität stark vergrößertes Rauschen mit Vorzugsfrequenzen, die im MHz-Bereich liegen.

Die Abb. 19 e ist im Bereich IV bei  $B = 330$  G  $> B_{t2}$  aufgenommen; die hochfrequenten Schwingungen sind wieder verschwunden.

#### IV. Vergleich von theoretischen und experimentellen Ergebnissen

Der Vergleich der experimentellen und theoretischen Ergebnisse kann für die Frequenz der auftretenden Wellen und die Lage der Instabilitätsbereiche durchgeführt werden. In Abb. 18 ist ein starkes Anwachsen der Rauschamplitude bei einer bestimmten Frequenz zu beobachten. Diese Frequenz stimmt mit der in der Theorie gefundenen Frequenz überein, wenn man die Rechnung für die im Experiment vorliegenden Plasmaparameter durchführt.

Der Übergang vom stabilen zum instabilen Verhalten des Plasmas drückt sich infolge zusätzlicher Ladungsträgerverluste in einem Anstieg der elektrischen

Feldstärke aus. Auf diese Weise läßt sich dieser Übergang sehr gut an der  $E$ - $B$ -Kennlinie feststellen.

Der Zusammenhang zwischen dem theoretisch bestimmten Instabilitätsbereich im  $k$ - $B$ -Diagramm und der  $E$ - $B$ -Kennlinie einer positiven Säule ist schematisch in Abb. 20 für 5 verschiedene lange Säulen dargestellt.

Ist die positive Säule gerade so lang, daß sich eine Instabilität mit der kritischen Wellenzahl  $k_c$  ausbilden kann, dann wird die Säule genau beim kritischen Magnetfeld  $B_c$  instabil, Abb. 20, Kurve 2. Für diese Säule mit der kritischen Länge  $L = L_c$  fallen die in Abb. 18 angegebenen Magnetfeldwerte  $B_w$  und  $B_{\min}$  mit  $B_c$  zusammen. Je nach Lage und Form des Instabilitätsbereiches, der aus den Plasmaparametern folgt, wird sich ein bestimmter turbulenter Magnetfeldbereich  $\Delta B = B_{t2} - B_{t1}$  ergeben; für Felder  $B > B_{t2}$  ergibt sich wieder ein stabiler, stark magnetfeldbestimmter Bereich.

In sehr langen Gefäßen,  $L \gg L_c$ , Kurve 1, können sich Wellen mit beliebig kleiner Wellenlänge ausbilden, d. h., auch Wellen mit Wellenzahlen  $k \approx k_c$ , die im Bereich  $B \approx B_c$  instabil werden. Damit ist der Beginn der Instabilität bei langen Gefäßen wieder durch Felder  $B \approx B_c$  bestimmt.

Die  $E$ - $B$ -Kurve weist also ein Minimum beim Feld  $B \approx B_c$  auf und erreicht spätestens das Ende des turbulenten Bereiches bei einem Magnetfeld  $B_{t2}$ , das größer ist als im Fall 2.

Für Gefäße, deren Länge  $L \gtrsim L_c$  ist, Kurve 3, kann sich eine Grundwelle mit der Wellenzahl  $k$  ausbilden. Das Magnetfeld, bei dem die Instabilität dieser Welle auftritt, ist größer als das kritische Feld  $B_c$ ; gleichzeitig können sich auch Wellen mit größerer Wellenzahl ausbreiten.

Für diese Oberwellen tritt eine Instabilität bei Magnetfeldern auf, die kleiner oder größer als das zur Grundwelle gehörige sind. In Sonderfällen kann eine Oberwelle mit der Wellenzahl  $k = k_c$  möglich sein, so daß der Beginn der Instabilität genau durch das Feld  $B = B_c$  bestimmt ist.

Im allgemeinen sind jedoch für Gefäßlängen  $L \gtrsim L_c$  die Magnetfeldstärken, die zur Instabilität führen, größer als  $B_c$ .

In Gefäßen  $L \lesssim L_c$  ist der Beginn der Instabilität stets durch Felder  $B > B_c$  bestimmt.

Die Breite des turbulenten Bereiches  $\Delta B = B_{t2} - B_{t1}$  nimmt mit abnehmender Gefäßlänge ab. Im Grenzfall ( $L = L_g$ , Kurve 4) verschwindet der turbulente

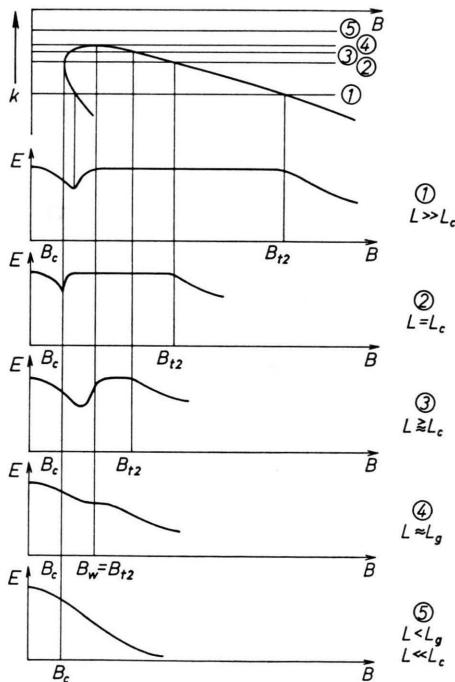


Abb. 20. Schematische Darstellung des Zusammenhangs zwischen dem Instabilitätsbereich im  $k$ - $B$ -Diagramm und der  $E$ - $B$ -Kennlinie für fünf verschiedene Längen der positiven Säule.  $L_c$  ist die zu den Größen  $k_c$  und  $B_c$  gehörende kritische Säulenlänge,  $L_g$  die Grenzlänge.

Bereich:  $\Delta B = 0$ . Bei sehr kurzen Gefäßen,  $L < L_g$ , Kurve 5, tritt keine Instabilität mehr auf.

Ein Vergleich mit den in Abb. 12 für  $p = 0,47$  Torr dargestellten, experimentell bestimmten  $E$ - $B$ -Kurven zeigt, daß das für eine Säulenlänge von  $L = 30$  cm und  $L = 25$  cm gemessene Verhalten dem Fall 3 in Abb. 20 entspricht: die Breite des turbulenten Bereiches ist klein und das Minimum der elektrischen Feldstärke  $E$  beim Magnetfeld  $B_{\min}$  ist flach. Bei der Säulenlänge  $L = 17$  cm wird Fall 4 in Abb. 20 erreicht, Fall 5 entspricht den weiter verkürzten Säulenlängen  $L \leq 15$  cm.

Die  $E$ - $B$ -Kurven der Abb. 12 ( $p = 0,12/0,073/0,064$  Torr) entsprechen der Kurve 3 in Abb. 20, wobei die Größe des turbulenten Bereiches III mit dem Druck  $p$  übereinstimmend mit theoretischen Ergebnissen abnimmt.

Fall 4 und 5 wird in diesen Druckbereichen erst für Säulenlängen  $L < 8,5$  cm erreicht. Die Grenzlänge  $L = L_g$  ist durch Extrapolation aus Abb. 14 bestimmbar.

Ein konkretes Beispiel für ein Gefäß, in dem sich Wellen mit einer kleinsten Wellenzahl  $k_1 = -0,1 \text{ cm}^{-1}$  ausbreiten können, ist in Abb. 21 dargestellt. Diese Grundwelle mit der Wellenzahl  $k_1 = -0,1 \text{ cm}^{-1}$

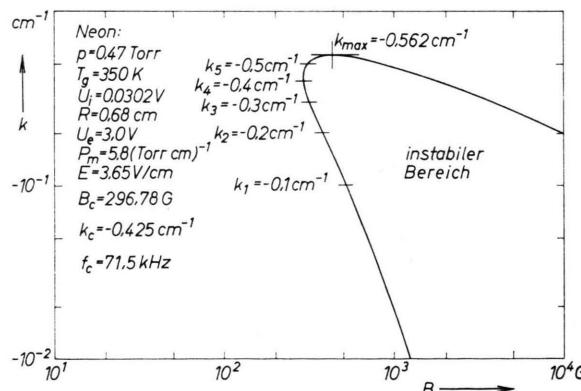


Abb. 21.  $k$ - $B$ -Diagramm zur Diskussion des Instabilitätsbeginns diskreter Wellen.

$\text{cm}^{-1}$  wird bei der Magnetfeldstärke  $B_1 = 520$  G instabil. Die gleichzeitig möglichen Oberwellen mit den Wellenzahlen  $k_2 = -0,2 \text{ cm}^{-1}$ ,  $k_3 = -0,3 \text{ cm}^{-1}$ ,

$k_4 = -0,4 \text{ cm}^{-1}$ ,  $k_5 = -0,5 \text{ cm}^{-1}$  werden bei Magnetfeldstärken  $B_2 = 380$  G,  $B_3 = 320$  G,  $B_4 = 300$  G,  $B_5 = 315$  G instabil. Kurze Wellen mit  $k > k_5$  sind bei den vorliegenden Plasmaparametern stabil.

Für Plasmaparameter, bei denen das Stabilitätsverhalten nach Abb. 9, Kurve c, bestimmt ist, tritt auch bei großer Gefäßlänge ein stabiler Zwischenbereich auf, in dem nach der üblichen Diffusionstheorie die elektrische Feldstärke  $E$  als Funktion des Magnetfeldes  $B$  abnimmt. Dieses Verhalten wird auch experimentell festgestellt: nach einem 1. Minimum der elektrischen Feldstärke tritt in manchen Fällen ein zweites auf.

Eine weitere Erklärung für ein solches Verhalten ist durch das Auftreten von Instabilitäten mit höherer azimutaler Wellenzahl  $m > 1$  möglich<sup>12</sup>.

### Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, daß das experimentell beobachtete Verhalten der diffusionsbestimmten positiven Säule im longitudinalen Magnetfeld theoretisch befriedigend erklärt werden kann.

Wesentliche Ergebnisse sind:

- Bei langen Entladungsgefäßen ( $L \gg L_c$ ) ist die positive Säule ab einem bestimmten kritischen Magnetfeld  $B_c$  instabil, wobei jedoch auch stabile Zwischenbereiche möglich sind. Zur Bestimmung der Zwischenbereiche ist eine genaue Kenntnis der Kopplung der Plasmaparameter nötig;
- bei kurzen Gefäßen ( $L \approx L_c$ ) tritt bei höheren Magnetfeldern wieder Stabilität ein;
- bei sehr kurzen Gefäßen ( $L \ll L_c$ ) tritt die hier untersuchte Instabilität nicht auf;
- die experimentell und theoretisch bestimmten Frequenzen der auftretenden Instabilitäten stimmen überein.

Herrn Professor Dr. W. KLUGE danken wir für sein Interesse an dieser Arbeit, Fräulein D. LANDES für die Unterstützung bei der numerischen Berechnung und Herrn H. MAY für die Ausführung der Glasbläserarbeiten.

<sup>12</sup> G. JANZEN u. E. RÄUCHLE, Proc. of the 9th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Bukarest 1969, p. 3.1.7.6.